Аналитический метод нахождения кривой (x=x(z),y=y(z)), на которой функционал

$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, \mathrm{d}z$ достигает экстремума.

Решение задачи сводится к интегрированию уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} W(x, y, z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} W(x, y, z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z)\right) + \rho(x, y, z)\left(\frac{\partial}{\partial z} W(x, y, z)\right) = 0$$

и имеет вид

$$W_1(x,y,z) = C_1 , W_2(x,y,z) = C_2,$$

где $C_{1,}$ C_2 – константы, определяемые пределами интегрирования (z_1,z_2).

Эквивалентной формой записи исходного уравнения является система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} x(z) = \frac{1}{\rho(x, y, z)} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} y(z) = \frac{1}{\rho(x, y, z)} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z)$$

Для частного случая, когда $y(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} x(z)$ эта система принимает вид уравнения Эйлера

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{\rho(x, y, z)} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z)\right) = \frac{1}{\rho(x, y, z)} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z)$$